Partie B : Variables Aléatoires à Valeurs Discrètes

I - NOTION DE VARIABLE ALEATOIRE

1°) Définition

On considère un univers fini Ω , $Card\ \Omega = n$ muni d'une probabilité P .

Une variable aléatoire est une application de Ω dans $\mathbb{R}$, on la note X :

$$\begin{array}{rccc} X & : \Omega & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & w_i & \longmapsto & X(w_i) \end{array}$$

L'ensemble de toutes les images possibles s'appelle $X(\Omega)$, et comme Ω est fini , $X(\Omega)$ est fini également , il comporte au plus n éléments . On dit pour cette raison que la variable aléatoire X est discrète (elle prend un nombre fini de valeurs isolées)

Exemple :

Un sac contient 4 jetons indiscernables numérotés de 1 à 4 . On extrait simultanément 2 jetons du sac .

Ω est l'ensemble des tirages différents possibles . Déterminer Ω et son cardinal , préciser la probabilité P sur Ω .

A chaque élément de Ω on associe la somme des numéros des 2 jetons tirés , cela définit donc une variable aléatoire X , préciser $X(\Omega)$ et son cardinal .

2°) Loi d'une variable aléatoire

C'est aussi une application , définie de $X(\Omega)$ dans $[0 ; 1]$, qui à chaque $X(w_i)$ associe la probabilité que $X = X(w_i)$ ou plus simplement que $X = x_i$, au cas où plusieurs éléments de Ω possèdent la même image .

$$\begin{array}{ccc} X(\Omega) & \rightarrow & [0 ; 1] \\ x_i & \longmapsto & P(X = x_i) = p_i \end{array}$$

On observe que la somme des p_i représente $P(\Omega)$ et qu'elle doit donc toujours être égale à 1 :

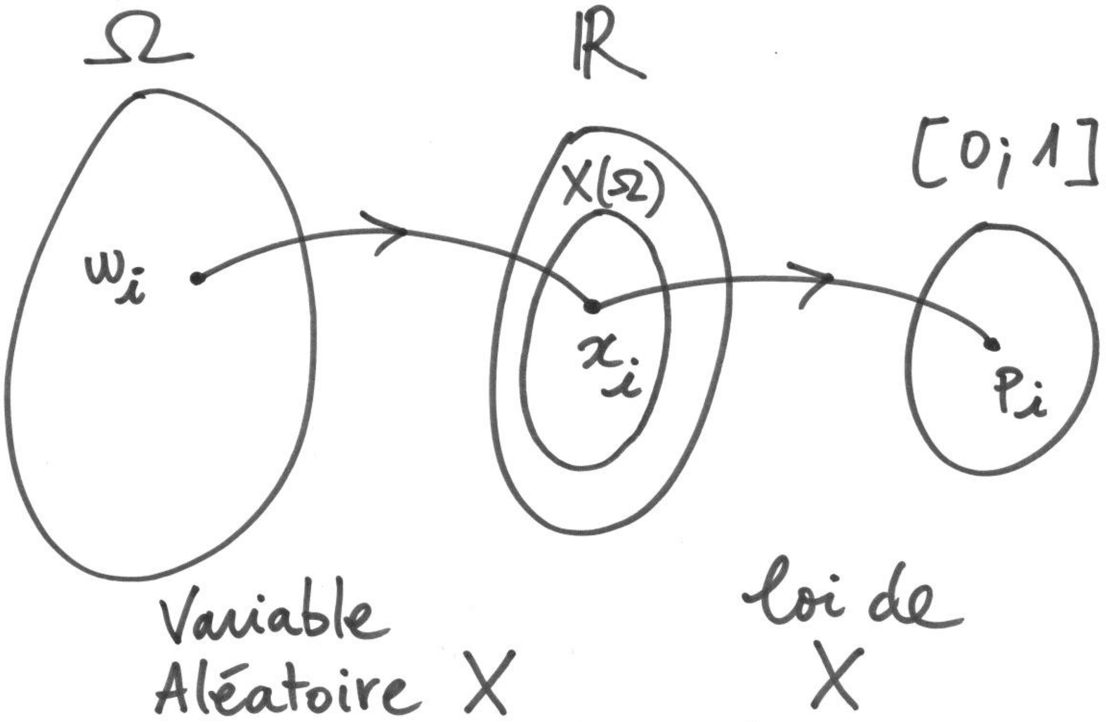
$$\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

La loi d'une variable aléatoire est présentée habituellement sous la forme d'un tableau donnant les valeurs de x_i (dans l'ordre croissant) et les probabilités p_i associées .

x_i	x_1 x_2 x_3 ……. x_m
p_i	p_1 p_2 p_3 …… p_m

Exemple (suite) :
Dresser le tableau donnant la loi de la variable aléatoire X de l'exemple précédent .

Résumé :



3°) Fonction de répartition

C'est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} & \longrightarrow & [0\,;1] \\ x & \longmapsto & F(x) = P(X \leq x) \end{array}$$

C'est une fonction en escalier , continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
F est croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Exemple : Tracer le graphe de F pour la variable X définie précédemment .

4°) Espérance mathématique

C'est un paramètre de position , qui indique une tendance centrale . C'est la moyenne des x_i pondérés par les p_i . On la note $E(X)$, elle est définie par :

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i}$$

Si X représente le gain d'un jeu , $E(X)$ représente le gain moyen espéré sur un grand nombre de parties . On dira que le jeu est équitable si $E(X) = 0$

5°) Variance et Ecart Type

La Variance $V(X)$ est une quantité positive qui mesure la dispersion des valeurs de X autour de la valeur de $E(X)$, c'est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne , soit :

$$\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 \times p_i}$$

Grâce aux propriétés de linéarité de la somme , rappelées ci-dessous :

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} k \times a_i = k \times \sum_{i=1}^{n} a_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} k = n \times k$$

On montre le Théorème de Koenig-Huygens :

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$$

Sachant que $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times p_i$, plus généralement : $E(X^n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^n \times p_i$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

L'Ecart Type se note $\sigma(X)$, il est égal à la racine carrée de la Variance , pour compenser l'effet du carré et redonner une dimension conforme à celle de la variable :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$$

Exemple : Calculer ces paramètres pour X ...

6°) Variable $Y = aX + b$ (a et b réels)

La variable aléatoire Y prend les valeurs $ax_i + b$ pour toutes les valeurs de i

On montre avec les définitions les propriétés suivantes :

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad , \quad V(aX + b) = a^2 V(X) \quad , \quad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$$